1. Vastus: 55 minuti pärast

Lahendus

Kuna esimene printer trükib 10 lehte minutis, siis 50 lehte prindib see 5 minutiga. Et pärast iga 50 lehe printimist teeb see üheks minutiks pausi, siis iga 6 minutiga trükib see 50 lehte.
Et teine printer trükib pidevalt 8 lehte minutis, siis iga 6 minutiga trükib see $8 \cdot 6 = 48$ lehte.
Koostöötades trükivad siis mõlemad printerid 6 minutiga kokku 50 + 48 = 98 lehte.
Jagame jäägiga arvu 900 arvuga 98:
$900 = 98 \cdot 9 + 18$.
Sellest järeldub, et koostöötades trükivad mõlemad printerid $9 \cdot 6 = 54$ minutiga kokku $9 \cdot 98 = 882$ lehte ning 900 lehest prindimata jääb täpselt 18 lehte. Kuna järgmise minuti jooksul esimene printer trükib 10 lehte ja teine 8 lehte ehk kokku 18 lehte, siis 900 lehe prindimiseks kulub täpselt 54 + 1 = 55 minutit.

Hindamine:

2p – leitud, et 6 minutiga esimene printer trükib 50 ja teine 48 lehte
2p – leitud, et 54 minutiga koostöötades printerid trükivad 882 lehte
1p – põhjendatud, et järgmise minuti jooksul koostöötades trükivad printerid 18 lehte
2p – saadud õige vastus

*ainult õige vastus annab 2p

2. Vastus: 120^0

Lahendus 1

Olgu x^0 ja y^0 vastavalt nurkade AKM ja BKL suurused.
Kuna nurk AKB on sirgnurk, siis selle suurus on 180^0 ning peab kehtima võrdus

$$x^0 + 30^0 + y^0 = 180^0,$$

millest saame, et $x^0 + y^0 = 150^0$.
Antud võrdustest $|AK| = |AM|$ ja $|BK| = |BL|$ järeldub vastavalt, et kolmnurgad KMA ja KBL on võrdhaarsed.
Kuna võrdhaarse kolmnurga KAM alusnurgad AKM ja AMK on võrdsed, st

$$\angle AKM = \angle AMK = x^0,$$

siis kolmanda sisenurga KAM suuruse võime arvutada järgmiselt:
$\angle KAM = 180^0 - 2x^0$.
Analoogiliselt, kuna võrdhaarse kolmnurga KBL alusnurgad BKL ja BLK on võrdsed y^0, siis kolmanda sisenurga KBL suurus on $180^0 - 2y^0$.
Nurga ACB suuruse arvutame kolmnurga ABC leitud kahe ülejäänud sisenurga suuruste kaudu:

$$\angle ACB = 180^0 - (\angle CAB + \angle CBA) = 180^0 - (\angle KAM + \angle KBL) =$$
$$= 180^0 - (180^0 - 2x^0 + 180^0 - 2y^0) = 2(x^0 + y^0) - 180^0 =$$
$$= 2 \cdot 150^0 - 180^0 = 300^0 - 180^0 = 120^0$$

Lahendus 2

Olgu $\angle AKM = x^0$, siis kuna $\angle AKB$ on sirgnurk, siis
$\angle BKL = 180^0 - x^0 - 30^0 = 150^0 - x^0$.
Kuna kolmnurgad KAM ja KBL on võrdhaarsed, siis analoogiliselt eelmise lahendusega saame, et
$\angle KAM = 180^0 - 2x^0$ ja $\angle KBL = 2x^0 - 120^0$
Järelikult
$\angle ACB = 180^0 - \left(180^0 - 2x^0 + 2x^0 - 120^0\right) = 120^0$.

Hindamine

1p – kasutatud fakti, et sirgnurga suurus on 180 kraadi
2p – kasutatud fakti, et võrdhaarde kolmnurga alusnurgad on võrdsed
3p – leitud CAB ja CBA summa
1p – leitud nurga ACB suurus

*ainult õige vastus annab 2p

3. Vastus: 33, 42, 51 ja 60

Lahendus

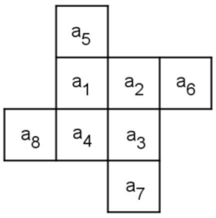
On lihtne näha, et kokku on kuus erinevat positiivset kahekohalist arvu, mille numbrite summa on 6. Nendeks on arvud 15, 24, 33, 42, 51 ja 60. Seega oleme leidnud kõik naturaalarvud, mis olid kirjutatud vihiku esimesele ja teisele leheküljele.
Kuna kolmandale leheküljele tekkis murd, mille väärtus oli täisarvuline, siis murru nimetajasse kirjutatud korrutise iga algtegur pidi taanduma. See tähendab, et murru nimetajasse kirjutatud korrutise iga algteguri astmenäitaja pidi olema mittesuurem lugejasse kirjutatud korrutise sama algteguri astmenäitajast.
Leiame kõigi kirjutatud arvude algteguriteks lahutused:
$15 = 3 \cdot 5$, $24 = 2^3 \cdot 3$, $33 = 3 \cdot 11$, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $51 = 3 \cdot 17$ ja $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.
Nende kõikide arvude korrutis on $2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$. Kuna algtegurid 7, 11 ja 17 on ühekordsed, siis naturaalarvud, mille algteguriteks need on, olid kirjutatud kindlasti lugejasse. Seega arvud 33, 42 ja 51 olid lugejas ja korrutis oli lugejas vähemalt $2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$. Ilmselt pidi lugejas olema veel arve, sest muidu nimetajas oleva algteguri 5 astmenäitaja oleks suurem selle algteguri astmenäitajast lugejas. Seega vähemalt üks arvudest 15 ja 60 pidi olema lugejas. Teiselt poolt oli kummalegi leheküljele kirjutatud vähemalt kaks arvu, seega lugejas oli neid neli ja nimetajas kaks.
Juhul kui lisaks arvudele 33, 42 ja 51 oleks lugejasse kirjutatud arv 15, siis oleks lugeja $2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$ ja nimetaja $24 \cdot 60 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$. Sellisel juhul murd ei oleks täisarvuline, kuna nimetajas oleks algteguri 2 astmenäitaja suurem, kui lugejas.
Järelikult esimesele leheküljele olid kirjutatud arvud 33, 42, 51 ja 60, mille korrutis on $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$, ja teisele arvud 15 ja 24, mille korrutis on $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Sel juhul on murru väärtus
$\frac{2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5} = 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 = 11781$.

Hindamine
1p – leitud kõik kahekohalised arvud, mille numbrite summa on 6
1p – kirjeldatud olukord, millal on murru väärtus täisarvuline
1p – lahutatud kõik vaadeldavad arvud algteguriteks
2p – algtegurite alusel põhjendatud, et arvud 33, 42 ja 51 peavad olema kirjutatud esimesele leheküljele
2p – algtegurite alusel põhjendatud, et lisaks arvudele 33, 42 ja 51 peab arv 60 olema kirjutatud esimesele leheküljele

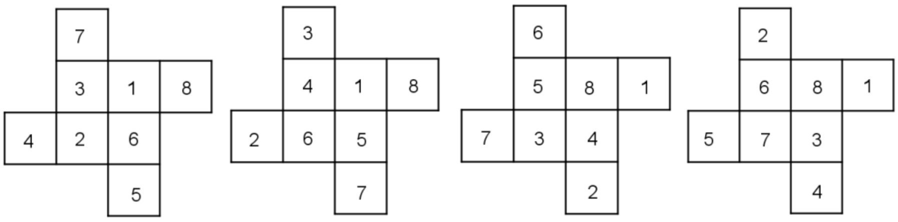
*ainult õige vastus annab 2p

4. Vastus: 12, 16, 20 ja 24.

Lahendus
Olgu ***x*** igas ristkülikus 1 × 3 olevate arvude summa ja olgu ***y*** ruudus 2 × 2 olevate arvude summa. Olgu $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ paarikaupa erinevad naturaalarvud väärtustega 1 kuni 8. Kirjutame need arvud kujundi ühikruutudesse järgmiselt:



Siis kehtivad võrdused
$$a_1 + a_4 + a_5 = a_2 + a_3 + a_7 = a_1 + a_2 + a_6 = a_3 + a_4 + a_8 = x$$
ja
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = y.$$
Märgime, et ühikruutudesse kirjutatud kõikide arvude summa on 36. Seega
$$4x = (a_1 + a_4 + a_5) + (a_2 + a_3 + a_7) + (a_1 + a_2 + a_6) + (a_3 + a_4 + a_8) =$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 36 + y.$$
Seega ruudus 2×2 olevate arvude summa y peab rahuldama tingimust $y = 4x - 36$.
Hindame nüüd arvu ***y*** väärtust. Kuna y on naturaalarvudest 1 kuni 8 nelja summa, siis selle vähim võimalik väärtus on $1+2+3+4=10$ ja suurim võimalik väärtus on $5+6+7+8=26$. Järelikult peavad kehtima võrratused $4x - 36 \geq 10$ ja $4x - 36 \leq 26$. Nendest saame võrratused $4x \geq 46$ ja $4x \leq 62$ ning lõpuks $x \geq 12$ ja $x \leq 15$.
Oleme saanud, et arvu x väärtuseks võiksid sobida ainult arvud 12, 13, 14 ja 15. Arvu y vastavaid väärtusi saame arvutada seosest $y = 4x - 36$. Vastavateks arvu ***y*** väärtusteks on siis arvud 12, 16, 20 ja 24.
Järgmised arvudega täidetud kujundid näitavad, et iga nimetatud olukord on võimalik.



<u>Hindamine</u>
1p – leitud, et ruudus 2 × 2 olevate arvude summa võib olla 12 ja toodud näide
1p – leitud, et ruudus 2 × 2 olevate arvude summa võib olla 16 ja toodud näide
1p – leitud, et ruudus 2 × 2 olevate arvude summa võib olla 20 ja toodud näide
1p – leitud, et ruudus 2 × 2 olevate arvude summa võib olla 24 ja toodud näide
3p – põhjendatud, et ainult arvud 12, 16, 20 ja 24 võivad olla ruudus 2 × 2 olevate arvude summaks
Seehulgas

- 1p – ristkülikus 1 × 3 olevate arvude summa ja ruudus 2 × 2 olevate arvude summa seose tuletamine
- 1p – ristkülikus 1 × 3 olevate arvude summale hinnangute andmine
- 1p – ruudus 2 × 2 olevate arvude summa võimalike väärtuste 12, 16, 20 ja 24 leidmine

5. Vastus: kolmas töötaja peab vastama, et ta töötab koos ühe tõerääkijaga

<u>Lahendus</u>
Kui esimene töötaja, kes väidab, et ükski tema kaastöötajatest pole tõerääkija, räägiks tõtt, siis teine ja kolmas töötajad peaksid alati valetama. Sellisel juhul aga teise töötaja väide, et tema töökaaslaste hulgas on täpselt üks tõerääkija, oleks tõene. Saadud vastuolust järeldame, et esimene töötaja valetab.
Kui teine töötaja oleks ka valetaja, siis oleksid kõik firma töötajad valetajad. Sellisel juhul esimese töötaja väide oleks tõene. See on aga võimatu, kuna juba teame, et esimene töötaja alati valetab. Järelikult teine töötaja räägib tõtt ja tema jutust järeldub, et ka kolmas töötaja peab olema tõerääkija.
Kuna kolmas töötaja on tõerääkija, peab ta vastama, et ta töötab koos ühe tõerääkijaga, kelleks on teine töötaja.

<u>Hindamine</u>
2p – põhjendatud, et esimene töötaja valetab (ebapiisavate selgituste korral kuni 1p)
2p – põhjendatud, et teine töötaja räägib tõtt (ebapiisavate selgituste korral kuni 1p)
2p – põhjendatud, et kolmas töötaja räägib tõtt (ebapiisavate selgituste korral kuni 1p)
1p – järeldatud vastus, et kolmas töötaja töötab koos ühe tõerääkijaga

*ainult õige vastus annab 1p
Selgitus on ebapiisav, kui ei ole näha, et vastandjuhul tekib vastuolu.